Исследовать функцию

$$y=\frac{x^{2}-4x+1}{x-4}$$

и построить ее график.

Для облечения исследования функция записывается в виде, удобном для анализа

$$y=x+\frac{1}{x-4}.$$

1. Сразу видно, что при $x=4$ функция имеет точку разрыва (не существует, на нуль делить нельзя), причем при x=4-e при малом $e\rightarrow 0$ функция отрицательна и $y\rightarrow -\infty .$ Если $x=4+e$, то при $e\rightarrow 0$ $y\rightarrow +\infty .$ Таким образом найдена асимптотическое поведение функции около точки разрыва.

2. Можно выделить другую асимптоту. Вычисляя

$$\lim\_{x\to \infty }\frac{y}{x}=1,$$

$$\lim\_{x\to \infty }y-x=0$$

становится ясно, что имеет место асимптота

$$y=x.$$

3. Вычисление производных обеспечивает вычисление точек, где имеют место экстремумы функции. Так как

$$y^{'}=1-\frac{1}{\left(x-4\right)^{2}},$$

то, полагая $y^{'}=0$, получается уравнение

$$\left(x-4\right)^{2}=1$$

с решениями

$$x\_{1}=5,$$

$$x\_{2}=3,$$

определяющими стационарные точки $\left(x\_{1},y\_{1}\right)=\left(5,6\right), \left(x\_{2},y\_{2}\right)=\left(3,2\right).$

Имея асимптоты, можно догадаться, в каких точках достигается максимум и минимум. Но следуя классическим рекомендациям, вычисляется вторая производная исследуемой функции

$$y^{'}^{'}\left(x\right)=2\left(x-4\right)^{-3}.$$

Так как $y^{''}\left(5\right)=2>0,$ то в первой точке функция достигает минимума. $y^{''}\left(3\right)=-2<0$ влечетза собой вывод, что во второй точке функция достигает максимум.

4. Вторая производная нигде в нуль не обращается, следовательно, не имеет точек перегиба.

5. Исследования приводят к следующему графику, где точки A,E – точки экстремумов.

